教学经验交流

平板上的定常与非定常流动

孙志仁

(华东理工大学 化工学院,上海 200237)

[摘要]文章推导了平板突然启动后的非定常流动规律符合高斯误差函数,借鉴平板边界层流动规律,获得了求解平板非定常流动的判别依据,通过临界边界厚度,定义了临界时间,运用分子微团与涡流微团模型探讨了流动状态变化过程。

[关键词]非定常流动;高斯误差函数;流动状态;临界边界厚度;临界时间;微团模型

Steady and Unsteady Flows on a Flat Plate

Sun Zhiren

(*School of Chemical Engineering, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237*)

Abstract: In this paper, it is deduced that the unsteady flow law of the plate after sudden start-up accords with Gauss error function. Referring to the flow law of plate boundary layer, the discriminant basis for solving unsteady flow of flat plate is obtained. The critical time is defined by the critical boundary thickness. Molecular and eddy microcluster models are used to investigate the process of flow state variation.

Key words: Unsteady flow; Gauss error function; flow state; critical boundary thickness; critical time; micro-cluster model

传递过程中的传统经典问题都得到了完美演绎,但结论应用的前提条件值得思考。本文拟通过对比一些经典理论,启发学生的思维,使学生从不同角度思考解决问题的方法。本文将讨论静止流体中平板突然启动后流体的运动规律,对比平板边界层定常流动与平板突然启动后非定常流动,借鉴平板边界层流动状态转变规律,对平板突然启动后非定常流动引入相关概念,并定义临界时间,运用分子微团与涡流微团模型探讨平板突然启动后流体流动状态的变化过程。

一、静止流体中平板突然启动后

静止的水面上有一块无限大的平板,初始速度为 $U_0=0$,突然以 U_W 的速度运动,并维持不变。平板下水中的速度分布 u_x 随时间发生变化,如图1所示。

对具体问题的分析如下:

[作者简介] 孙志仁(1964-),男,副教授。

[通信作者] 孙志仁,E-mail:zrsun@ecust.edu.cn。

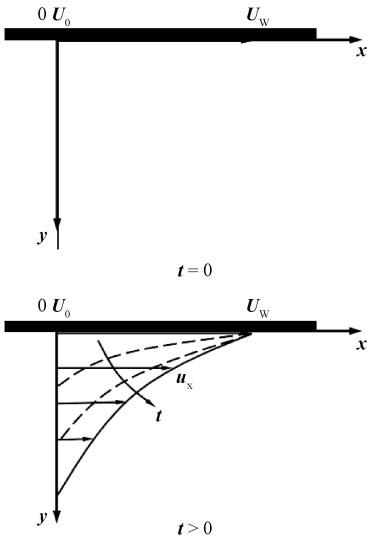


图 1 静止流体中的平板启动示意图

流动非定常：$\frac{\partial u_x}{\partial t} \neq 0$

x 方向没有重力：$X=0$

x 方向无压差力：$\frac{\partial p}{\partial x}=0$

一维流动：

$$\begin{cases} u_x \neq 0 \\ u_y = 0 \\ u_z = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \neq 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial z}=0 \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}=0 \\ \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \neq 0 \\ \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}=0 \end{cases}$$

平板下流体运动规律符合奈维-斯托克斯方程：

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)=$$
$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho X+\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)$$

根据分析，简化奈维-斯托克斯方程，可得一维非定常流动数学模型[1]，即：

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \tag{1}$$

初始条件：$t=0, u_x=0$

边界条件：$t>0, \begin{cases} y=0, u_x=U_W \\ y\to\infty, u_x=U_0=0 \end{cases}$

方程(1)为一维非定常偏微分方程，令：

$$\eta=\frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \tag{2}$$

则可求得：

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}=\frac{\partial u_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}=-\frac{\eta}{2t}\frac{\partial u_x}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial u_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{4\nu t}}\frac{\partial u_x}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}=\frac{1}{\sqrt{4\nu t}}\frac{\partial \frac{\partial u_x}{\partial \eta}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{4\nu t}\frac{\partial^2 u_x}{\partial \eta^2}$$

代入原方程可得：

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_x}{\mathrm{d}\eta^2}+2\eta\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}\eta}=0 \tag{3}$$

边界条件：$\begin{cases} \eta=0, u_x=U_W \\ \eta\to\infty, u_x=U_0=0 \end{cases}$

设 $\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}\eta}=p$，则有：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\eta}+2\eta p=0$$

积分得 $p=C_1 e^{-\eta^2}$

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}\eta}=C_1 e^{-\eta^2}$$

再积分：

$$\int_{UW}^{u_x}\mathrm{d}u_x=C_1\int_0^{\eta}e^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta$$

$$u_x-U_W=C_1\int_0^{\eta}e^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta$$

边界条件：$\eta\to\infty, u_x=U_0=0, C_1=\frac{U_0-U_W}{\int_0^{\infty}e^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta}$，

其中 $\int_0^{\infty}e^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$。解方程得速度分布：

$$\frac{u_x-U_W}{U_0-U_W}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta}e^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta$$

上式中右侧函数称高斯误差函数，表示为：

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta}e^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta=erf(\eta)=\frac{u_x-U_W}{U_0-U_W} \tag{4}$$

其中 $\eta=\frac{y}{\sqrt{4\nu t}}$。

静止流体中平板突然启动后，对流体的流动要求是层流流动。那么，随着时间的推移，平板下流体的运动都符合同样的规律吗？

平板边界层流动和平板突然启动问题有不同之处，也有相似的地方。随着时间的推移，平板下

流体影响区域越来越远。教学中可对照边界层流动的特点，让学生思考两者的相似之处。

二、平板上的流体流动

（一）平板边界层定常流动

普朗特提出的边界层理论指出[1]：低雷诺数下，平板附近的流体黏性影响区域宽广；而高雷诺数下，影响区域仅限于壁面附近薄层及下游。如图 2 所示，高雷诺数下称为边界层流动，而低雷诺数下则不是。

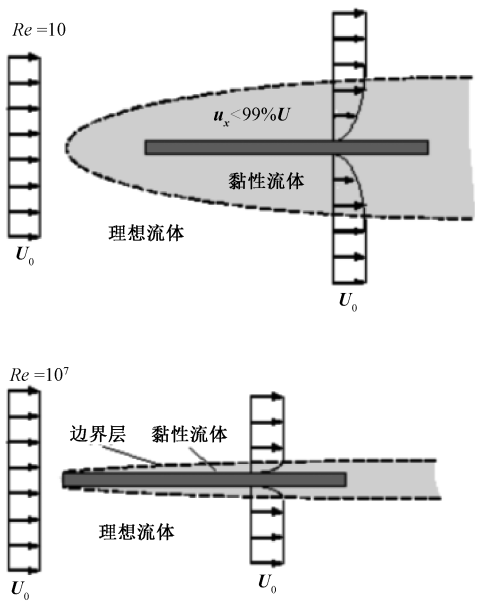


图 2　平板边界层概念

流体绕平板流动，随着流动方向的距离增大，在壁面的垂直方向上，壁面对速度的影响区域越来越宽。定义速度达到 99%的来流速度 U_0 时，对应的边界为边界层，则边界与壁面的距离称边界层厚度。

平板边界层如图 3 所示。当达到离平板前端点某一位置时（即 x_c 处），边界层内流体流动由层流转变为湍流，此处相对应的雷诺数为：

$$Re_{x_c}=\frac{U_0 x_c}{\nu}=5\times10^5 \tag{9}$$

根据普朗特边界层方程，求得层流边界层厚度为：

$$\frac{\delta}{x}=\frac{4.96}{\sqrt{Re_x}} \tag{10}$$

平板边界层流动为定常的二维流动[1]，有层流和湍流之分。

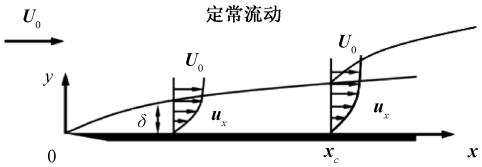


图 3　平板边界层

（二）平板突然启动后非定常流动

1.流动状态

静止流体中平板突然启动问题为非定常的一维流动，只考虑层流状态。

由图 2 可知，低雷诺数下，整个流场可能都保持层流状态。而高雷诺数下，从平板前端点到 x_c 处是层流，再往后不能保证是层流，它将是过渡区和湍流区。

根据相对运动原理，将静止流体中的平板启动改为平板静止，则平板上的流体突然运动。这是相似之处。对比可知，低雷诺数下适用；高雷诺数下的层流段也适用。

但是，平板边界层是定常流动，而平板突然启动是非定常问题。根据相对运动原理，同时将横坐标分别用距离 x 和时间 t 表示，对比如图 4 所示。

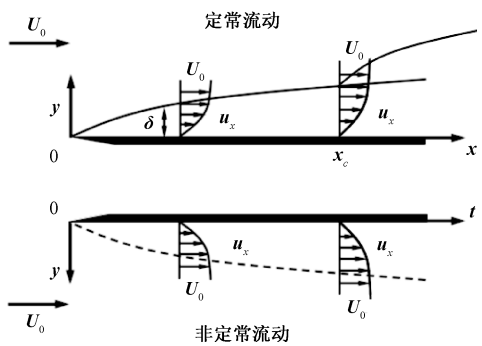


图 4　平板边界层定常流动与非定常流动

从图 4 中可以看到，对于非定常流动，随着时间的推移，流体黏性影响区域也与平板边界层流动类似。给影响区域也定义一个厚度概念，与边界层厚度一致，对应边界处的速度为 99%U_0。当非定常流动时间开始达到 t_c 时，其厚度与平板边界层流动 x_c 处的边界层厚度相等。定义平板突然启动的临界时间为 t_c，则当 $t>t_c$ 时，板下流体不再保证遵循层流规律。

2.雷诺数

借鉴平板边界层流动雷诺数定义，定义静止流体中平板突然启动后流动状态判别的无量纲雷诺数，表达式为：

$$Re_\delta = \frac{U_0 \delta}{\nu} \tag{11}$$

式中 δ 为边界厚度，单位是 m。

相对应的临界雷诺数也借鉴平板边界层流动的临界雷诺数，如式(9)。将式(10)代入式(11)，可得：

$$Re_\delta = \frac{U_0 \delta}{\nu} = \frac{U_0 x}{\nu} \frac{4.96}{\sqrt{Re_x}} = 4.96\sqrt{Re_x} \tag{12}$$

将式(9)代入式(12)，可得突然启动的临界雷诺数：

$$Re_{\delta_c} = 3\ 507 \tag{13}$$

静止流体中的平板突然启动问题，流体的流动状态由式(13)判断。

3.临界边界厚度

对半无限大介质，其雷诺数一定会大于临界雷诺数。但是，当平板运动速度确定后，根据临界雷诺数的定义，相应的临界边界厚度为：

$$\delta_c = 3\ 507 \frac{\nu}{U_0} \tag{14}$$

平板突然启动后，经过时间 t，对应的边界厚度就是距离壁面的影响区域。当边界厚度发展到临界边界厚度时，其经历的时间称临界时间 t_c。

时间小于临界时间，流动状态是层流；大于临界时间，无法保证流动状态仍是层流。

4.临界时间

根据边界厚度的定义，将边界处的速度 99% U_0 代入式(4)，有：

$$erf(\eta) = \frac{u_x - U_W}{U_0 - U_W} = \frac{99\%U_0}{U_0} = 0.99$$

查误差函数表[1]并进行线性内插得：

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{4\nu t}} = 1.824$$

当 $t = t_c$ 时，$y = \delta_c$，有：

$$t_c = 0.075\ 14 \frac{\delta_c^2}{\nu}$$

将式(14)代入上式，得临界时间为：

$$t_c = 9.242 \times 10^5 \frac{\nu}{U_0^2} \tag{15}$$

有了临界时间的定义，就能保证计算的有效性。

笔者从判断平板边界层流动状态得到启发，引用了一个重要的临界值，即临界边界层厚度，进而定义了临界时间。那么，非定常流动一定会在临界时间后转变为湍流吗？

这个问题可以通过圆管内流动状态得以解答[1]。管内的流动状态是由进口段边界层发展决定的：若进口段边界层发展汇交时为层流，则管内流动状态为层流；若湍流汇交，则管内流动状态为湍流。不考虑进口段，只观察充分发展区域，管内流体从突然开始流动到定常流动。若管径足够大，这与平板上的流体突然运动类似，当发展到一定时间(即临界时间)时，对应的临界边界厚度处的流体微团开始出现湍动状态。带有湍流脉动的微团横冲直撞，使湍动状态蔓延。于是，原本还是层流的边界层瞬间转变为湍流边界层。

平板边界层 x_c 处，平板突然启动后到达 t_c 时，有相似的速度分布，如图 5 所示。

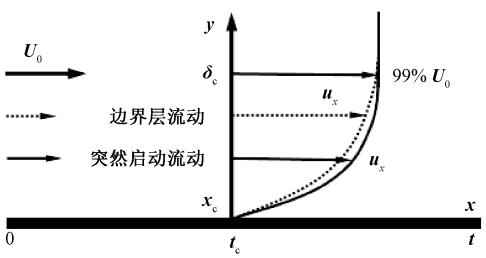


图 5 两种速度对比

平板边界层速度分布是布拉修斯级数解[1]，以图 5 中虚线表示；平板突然启动是高斯误差函数解，以图 5 中实线表示。它们的区别在于前者是二维流动，后者是一维流动。平板边界层层流段的 u_y 将流体往外推，u_x 变化更快。从质量守恒来看，u_x 也一定减小。

三、运用微团模型探讨流动状态变化过程

笔者由充分发展湍流模型的描述中得到启发[1]，尝试用流体微团模型解释平板突然启动后板下流体由层流转变为湍流的过程。

流体流动状态分层流和湍流，它们的传递机理不同。层流状态下进行分子传递；湍流状态下

微团脉动形式的涡流传递占主导地位。研究中需要有简化的模型和假定。

(一)分子微团

根据连续介质假定:流体微团相对于分子尺度足够大,相对于设备尺度充分小,且连续一片。

微团由大量分子组成。分子热运动产生的进出分子流不会对微团产生脉动。层流就是由分子微团组成的模型。每一层上的微团都按相同的速度向前运动,不会发生排挤、碰撞和掺混。前进的过程中,微团在各自旋转,旋转方向和速度梯度有关。若速度分布为 $u_x=cy$,则流体微团的旋转角速度为:

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=-\frac{1}{2}c$$

相邻不同速度层之间没有微团交换,只有层与层界面之间的分子随机运动产生的分子流传递。动量传递规律服从牛顿黏性定律:

$$\tau_{yx}=-\mu\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y} \tag{16}$$

为了便于理解和分析,运用相对运动原理,将静止流体中的平板启动改为平板静止,平板下的流体突然运动。

如图 6 所示,从流体突然运动那一刻到临界时间 t_c,在边界厚度内的流动都是层流。在层流区,紧贴壁面的那一层微团附着在壁面上,速度和壁面一样,称黏附性或黏性不滑脱现象。板面附近区域的流体微团受壁面和黏性的控制,状态基本相同,微团形态不变,作层流流动。在外界扰动干扰后,流体还能恢复层流状态,层流是稳定的。这可从雷诺试验得到解释[1],也可以从平板边界层层流段流动得到印证。平板边界层层流段是二维流动,存在 u_y 的流动,居然没有扰乱它的层流流动状态。科学家将不同波长的震荡波作为扰动,研究流动状态的转变,结果表明[3]:小于临界雷诺数时,扰动是衰减的,流动状态稳定。

随着边界厚度延伸,它开始大于临界边界厚度 δ_c,称过渡区。速度影响区域离壁面越来越远,壁面的控制力开始下降。雷诺认为[3]:在稳定状态下,黏性会抑制扰动;在不稳定状态下,黏性会将能量传递给扰动,反而增强扰动。在过渡区里,微团大部分维持原状态,小部分纠结附近有相同性格的分子微团,抱团组成较大微团。分子微团自旋的同时,还在组成的大微团中作圆周运动,称旋涡,即涡流微团,如图 6 所示。

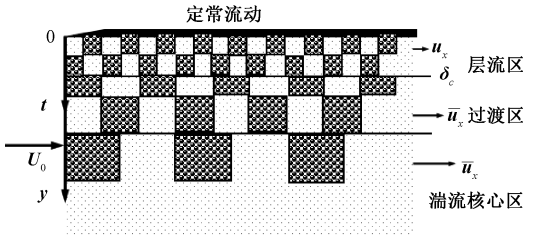


图 6 壁面附近的层流区、过渡区和湍流核心区

(二)涡流微团

"湍流旋涡尺寸较流体分子的平均自由程大几个数量级"[2]。涡流微团也可以由几个或更多的分子微团组成。

各个涡流微团结构、大小和状态都不相同,每一个涡流微团在任何时刻的表现也不一样。这都是脉动造成的,脉动是湍流的特点。湍流的瞬时速度是非定常的,用时均模型表示如下:

$$u_x=\bar{u}_x+u'_x \tag{17}$$

式中的 u'_x 是脉动速度。

涡流微团脉动形成有各种原因,除了外界因素,本文尝试分析微团自身脉动产生的原因。

1. 分子热运动

分子热运动产生分子流可能会引起震荡波,在不稳定状态下将扰动变成微团脉动。

2. 动能损失[1]

已经证明,最小旋涡的尺度为:

$$\lambda_0=\left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$$

相应的脉动速度

$$u'_\lambda=(\nu\varepsilon)^{1/4}$$

式中 ν 为运动黏度,ε 为能量耗散。

3. 分子微团自旋且作圆周运动产生的旋涡效应

旋涡效应是在圆周运动的轴向产生的自吸效应,于是产生的脉动流会造成微团脉动,即湍流的脉动。

当边界厚度增加到过渡区，少量个头不太大的涡流微团开始出现。离壁面越远，微团数量越多，它们大大小小分布在流体中。这个区域称为湍流过渡区。

在过渡区里，除了有涡流微团，还有大量的分子微团。涡流微团的脉动会造成过渡区的局部扰动，但还不至于影响到整个层流区的流动状态。

当边界厚度发展到湍流核心区时，涡流微团脉动引起的雷诺应力规律服从普朗特混合长方程：

$$\tau_{yx}^{t}=\rho\,\overline{u'_x u'_y}=-\rho l^2\left|\frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}y}\right|\frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}y} \qquad (18)$$

式中 l 为垂直于流动方向上的统计平均混合长，单位是 m。

湍流核心区涡流微团间空隙处也充满分子微团，但是它传递的动量量级与涡流微团相比可忽略。

脉动一旦产生，微团除非在排挤、碰撞和掺混中被吸收（即能量耗散而消失），否则就会像幽灵一般存在着，通过排挤和碰撞传染，并蔓延至整个湍流场。

于是图 6 中的层流区会变薄，成为充分发展湍流的黏性底层区。原来的过渡区也会收缩，湍流核心区占主导地位。非定常流动也转变为定常流动，形成湍流通用速度分布，如图 7 所示。

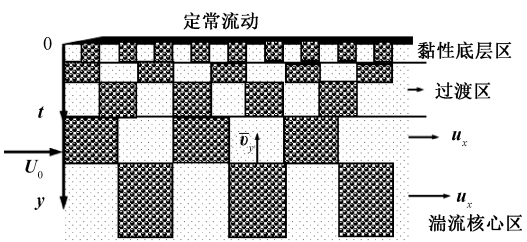


图 7　湍流通用速度分布示意图

对静止流体中的平板启动 t_c 时间后，速度分布规律不再适用高斯误差函数。平板下的流体流动状态若转变成湍流，应该用湍流规律（即湍流通用速度分布或 1/7 次律）求解。

四、结论

1. 平板突然启动后的非定常流动规律符合高斯误差函数。

2. 借鉴平板边界层流动规律，获得求解平板突然启动后的非定常流动问题的判别依据，平板突然启动后的时间需小于临界时间：

$$t_c=9.242\times10^5\,\frac{\nu}{U_0^2}$$

式中 ν 为流体运动黏度，单位是 $\mathrm{m^2/s}$；U_0 为平板启动后维持的速度，单位是 m/s。

3. 运用分子微团与涡流微团模型探讨流动状态变化过程。

五、结束语

本文借鉴平板边界层的流动状态改变规律，推导平板突然启动后，保持层流状态的临界时间，并采用微团模型解释了流动状态的改变过程。目的是通过对比、借鉴，启发学生如何去思考问题。分析过程能让学生直观面对抽象内容，理解并掌握传递规律。有不当之处，敬请批评指正。

（文字编辑：李丽妍）

参考文献：

[1] 戴干策，任德呈，范自晖.传递现象导论[M].北京：化学工业出版社，2008：33-36，73-75，88-89，90，101-102，229-231，238-239.

[2] 博德，斯图沃特，莱特富特.传递现象[M].戴干策，戎顺熙，石炎福，译. 北京：化学工业出版社，2004：138.

[3] 普朗特，奥斯瓦提奇，维格哈特.流体力学概论[M].郭永怀，陆士嘉，译. 北京：科学出版社，1981：200-210.